`Preparaduría IX`
`18/11/2007`

1.- Si una función continua $f(x)$ es diferenciable en un entorno reducido de $x = \xi$ y si $f'(x) \to L$ cuando $x \to \xi$ entonces $f'(\xi)$ existe y es igual a L

2.- Suponga que f y g son continuas en $0 \leq x \leq a$ y diferenciables en $0 < x < a$; $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ y $f'(x)$, $g'(x)$ son positivas, pruebe que:

i) Si $f'(x)$ es creciente, entonces $\frac{f(x)}{x}$ es creciente.
ii) Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es creciente, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es creciente.

Compruebe entonces que las funciones

$$\frac{x}{\sin x} \quad ; \qquad \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x} \ ; \qquad \frac{\frac{1}{6}x^3}{x - \sin x} \quad \ldots$$

son estrictamente crecientes en $[0, \frac{1}{2}\pi]$

3.- Si $\phi'(x) \to a$ cuando $x \to \infty$ y $a \neq 0$ entonces $\phi(x) \sim ax$ (esto es, $\frac{\phi(x)}{x} \to a$). Si $a = 0$ entonces $\phi(x) = o(x)$ (esto es, $\frac{\phi(x)}{x} \to 0$). Si $\phi'(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ entonces $\phi(x) \to \infty$.

4.- Si $\phi(x) \to a$ cuando $x \to \infty$ entonces $\phi'(x)$ no puede tender a otro límite más que a cero.

5.- Hallar los límites.

$$\text{a)} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\text{b)} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{c)} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$$

$$\text{d)} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{atención! el límite es -4}$$

$$\text{e)} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x}$$

$$\text{f)} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{g)} \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$$

$$\text{h)} \lim_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{x} \qquad \text{i)} \lim_{x \to \infty} x^{\alpha} \sin \frac{a}{x} \quad (\alpha > 0)$$

6.- Probar que:

$$\lim_{x \to n} (x-n)\csc \pi x = \frac{(-1)^n}{\pi}$$

$$\lim_{x \to n} \frac{1}{(x-n)} \left[\csc \pi x - \frac{(-1)^n}{(x-n)\pi} \right] = \frac{(-1)^n \pi}{6}$$

7.- Demostrar que si $|f|$ es diferenciable en ξ y f es continua en ξ, entonces f es diferenciable en ξ. Dar un contraejemplo si se elimina la hipótesis de continuidad de la f.

8.- Demostrar que si $f'(x)$ es creciente entonces las tangentes a la gráfica de $f(x)$ cortan la gráfica solamente una vez.

9.- Demostrar la siguiente generalización de la inecuación de Bernoulli: si $n \in \mathfrak{Q}$, $n > 1$, entonces $(1+x)^n > 1 + nx$ para $-1 < x < 0$ y $0 < x$ (observe que se cumple la **igualdad** en $x = 0$). (cf. ejercicio 18, prepa V).

10.- Hallar funciones convexas f y g tales que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x es entero.

11.- Demostrar que una función convexa debe ser continua.